## EXERCICE 30

**A** $x \in [2, +\infty[$

$f(x) = \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 - 4})$

1) – a) la fonction :

$x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 4}$ est dérivable sur $]2, +\infty[$ ( car $x^2 - 4 > 0$ )
et strictement positive
d'où f est dérivable sur $]2, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x + \sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\text{Ln}(x + \sqrt{x^2-4}) - \text{Ln}2}{x-2}$

On pose $X = x + \sqrt{x^2 - 4}$

$x \to 2^+$ alors $X \to 2^+$

$x = \frac{X^2+4}{2X}$

Alors $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\text{Ln}X - \text{Ln}2}{\frac{X^2+4}{2X} - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\text{Ln}X - \text{Ln}2}{\frac{(X-2)^2}{2X}}$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\frac{2x}{X-2}\right)\left(\frac{\text{Ln}X - \text{Ln}2}{X-2}\right) = +\infty$
$\searrow +\infty \qquad \searrow \text{Ln}'2 = \frac{1}{2}$

f n'est pas dérivable à droite en 2

c) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} > 0$

| $x$ | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | + | |
| $f(x)$ | Ln2 | ↗ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 - 4}) = +\infty$
$\searrow +\infty$

2) – a) on pose : $\varphi(x) = f(x) - x$

$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$

$= \frac{5 - x^2}{\sqrt{x^2-4}(1+\sqrt{x^2-4})}$

| $x$ | 2 | | $\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | + | | 0 | - | |
| $\varphi(x)$ | Ln2-2 | ↗ | $\varphi(\sqrt{5})$ | ↘ | $-\infty$ |

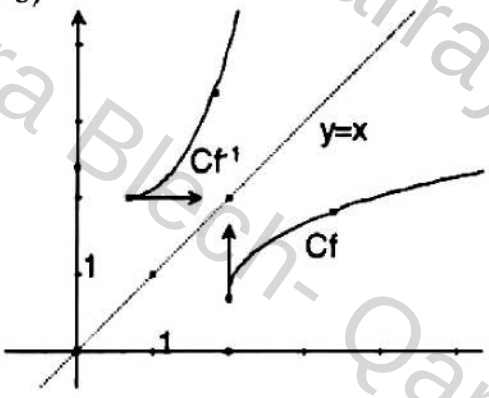
$\varphi(\sqrt{5}) = \text{Ln}(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{5} < 0$

$\varphi$ admet $\varphi(\sqrt{5})$ comme maximum absolu

$\Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(\sqrt{5}) \quad \forall x \in [2, +\infty[$

$\Rightarrow \varphi(x) < 0$ d'où $(C_f)$ est au dessous de D

b)




Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn